

Chaire Marchés en mutation, Ecole Polytechnique et Université d'Evry Val d'Essonne, 2014

1 Participants

- Ecole Polytechnique (EP) : E. Bacry, S. De Marco, J. Bion Nadal, N. El Karoui, E. Gobet, C. Hillairet, S. Laruelle (Université de Créteil), J.-F. Muzy (Université de Corté), N. Touzi,
- University d'Evry (UEVE) : E. Chevalier, S. Crépey, A. Gloter, M. Jeanblanc, T. Lim, V. Ly Vath, S. Menozzi, C. Profeta, A. Sagna, S. Song
- Post-doctorants : A. Agarwal (EP, financement hors Chaire), S. Kallblad (EP, financement hors Chaire), I. Mastromatteo (EP), T. Kruse (UEVE), S. Pagliarani (EP, financement hors Chaire), P. Turkedjiev (financement hors Chaire).
- Doctorants : A. Aksamit (UEVE), Y. Armenti (UEVE), J. Boutté (EP), M. Gaigi, G. Guo, T. Jaisson (EP), G. Liu (EP), G. Matulevicz (EP), T. M. Nguyen (UEVE), Z. Ren (EP), R. Romero (UEVE)

2 Thèmes de recherche

Les sujets de recherches abordés par nos équipes sont guidés par le projet de recherche approuvé par la FBF.

2.1 Risque de liquidité (Chevalier, Gaigi, Ly Vath)

Depuis la crise de liquidité constatée récemment sur les marchés financiers, plusieurs membres de l'équipe s'intéressent aux problèmes liés à la gestion de risques de liquidité. Du point de vue financier, le but est de tenir compte des contraintes imposées par la liquidité sur la gestion du risque. Cela nous amène à résoudre de nouveaux problèmes interconnectés : l'étude de modèles tenant compte de la liquidité du marché, la caractérisation de stratégies de liquidation ou d'allocation d'actifs et de *market making*, et finalement leur résolution numérique. La première tâche consiste à étudier l'impact de la liquidité sur les marchés. Nous étudions en particulier la microstructure des marchés liée à la dynamique des *bid-ask spreads* et plus généralement des carnets d'ordre, l'impact des transactions sur les prix et les éventuels changement de régimes de liquidité. Dans le deuxième point, nous nous intéressons à des problèmes de liquidation d'actifs et d'allocation optimale dans des modèles tenant compte de frictions de marché. Un autre problème important consiste à étudier les problèmes de *market making* optimal sous contraintes d'inventaire et d'impact sur les prix des actifs. Cela nous amènera à introduire et étudier des problèmes non standard de contrôle optimal. Nous nous intéressons également à la résolution numérique d'un problème d'optimisation de portefeuille dans un contexte de risque de liquidité. Enfin, un problème connexe consiste à étudier un problème de distribution de dividendes dans un contexte de risque de liquidité.

2.2 Risques et Régulation haute fréquence (Gloter, Bacry, Boutté, Mastromatteo, Laruelle)

2.2.1 Modélisation de la dynamique des flux et des prix (Gloter, Boutté, Bacry, Jaisson)

Un premier travail a consisté à étudier des problèmes d'estimation statistique, par filtrage, de fréquence d'arrivées d'ordres sur un carnet d'ordres. En particulier nous avons considéré des modèles simples où les régimes d'arrivée d'ordres peuvent varier de manière Markovienne dans le temps. Pour l'instant, les premiers résultats sont obtenus sur des simulations et nous comptons étudier des données réelles par la suite.

Parallèlement, nous avons travaillé sur des modèles à bases de processus de Hawkes. Nous avons généralisé le modèle haute fréquence, que nous avons introduit il y a quelques années. Ce modèle ne rendait

compte “que” de la dynamique des prix alors que le nouveau modèle intègre la dynamique du flux d’arrivée des ordres de marchés. Il s’agit d’un modèle qui reproduit à la fois les principales caractéristiques statistiques haute fréquence du prix, du flux d’arrivée des ordres de marché (principalement leur corrélation longue portée) et de l’impact d’un ordre. L’impact d’un ordre de marché (voire d’un meta-ordre, c-à-d. d’une succession de petits ordres) quantifie l’influence que ce (meta-)ordre a sur les variations de prix futurs. La compréhension des problèmes liés à l’impact sont au coeur des problèmes liés au risque haute fréquence.

Dans un travail récent, nous avons étudié un modèle de Hawkes en dimension 8 permettant de rendre compte des corrélations des différents flux des ordres limites/annulation/marché arrivant au bid ou à l’ask ainsi que des variations du mid-price. Ce modèle permet de dévoiler les principales propriétés de la structure haute fréquence (notre étude démarre à l’échelle de $10\mu s$) des carnets d’ordres.

2.2.2 Estimation non paramétrique des processus de Hawkes (Bacry, Jaisson, Muzy)

Les processus de Hawkes connaissent un succès croissant dans de très nombreuses applications et tout particulièrement en finance haute fréquence où ils sont devenus, aujourd’hui, quasiment incontournables. Développer des méthodes efficaces d’estimation paramétrique ou non paramétrique est essentiel.

Nous avons réalisés deux travaux en estimation non paramétrique. Le premier pose les bases rigoureuses d’une nouvelle technique d’estimation non-paramétrique. Avant le développement de cette méthode, il n’existait que deux méthodes d’estimation non-paramétriques aucune des deux n’étant adaptées au données haute fréquence (dimension strictement supérieure à 1 et grandes quantité de données). Nous avons fait une analyse statistique rigoureuse de cette technique et l’avons illustré sur de très nombreux exemples. Elle s’est révélé particulièrement efficace. Le second travail affine cette technique d’estimation dans le cadre de noyaux de Hawkes en loi de puissance qui sont caractéristiques des phénomènes de corrélations longue portée que l’on observe en finance.

2.2.3 Estimation paramétrique des procesus de Hawkes en très grande dimension (Bacry, Muzy)

De même, nous avons réalisé deux travaux sur l’estimation non paramétrique des processus de Hawkes en très grande dimension (de l’ordre de plusieurs centaines, et intégrant ainsi plusieurs dizaines de milliers de paramètres). Nous sommes en cours d’application des résultats que nous avons obtenus dans ces travaux à la modélisation de séries haute fréquence. Les différentes composantes du processus pouvant modéliser aussi bien le grand nombre d’acteurs intervenants sur le marché que les différents volumes des ordres envoyés par un acteur en particulier.

2.2.4 Processus linéaire en grande dimension et risque systémique (Bacry, Mastromatteo, Muzy)

Ici, la question essentielle qui est étudiée est de savoir si une instabilité dans les marchés peut découler non pas du fait de l’intervention irresponsable d’un acteur en particulier mais simplement de la très grande dimension du réseau en interaction que constitue les différents intervenant sur un marché.

Nous avons étudié les propriétés génériques d’un processus stochastique linéaire dans le régime des grandes dimensions. Nous avons mis en évidence une zone critique au delà de laquelle ces systèmes linéaires de grande dimension conduisent à de fortes instabilités dues essentiellement à l’interaction en un nombre très important d’agents.

2.2.5 Modèles de liquidité intra-journalière - Régulation (Bacry, Laruelle, Mastromatteo)

Nous avons menés une étude empirique systématique sur la liquidité intra-journalière des différents marchés actions (CAC, SP, Nasdaq, ...). Nous avons étudié la répartition des volumes traités au cours de la journée par tranche de 5 minutes ainsi que d’autres indicateurs, comme le nombre de transactions, la volatilité du prix, la fourchette offre-demande ou encore l’amplitude de l’imbalance (différence entre les quantités de volumes postés à l’achat (bid) et à la vente (ask) en valeur absolue). Cette étude, délicate à réaliser d’un point de vue numérique, nous permet, en ce moment, d’essayer de comprendre les règles sur le comportement de la liquidité intraday et les connexions entre les différents indicateurs et notamment à la corrélation intrasectorielle. Ce travail sert de base pour un modèle multi-agents où les individus ont le choix entre acheter ou vendre (pour la journée entière) à l’aide d’une stratégie prise dans un ensemble fini. Partant d’une proportion d’agents initiale un jour donné, à la fin de la journée chaque agent peut estimer son impact de marché (market impact) et son risque de marché (market risk) en fonction des conditions

de marché. Ces deux facteurs vont influencer la décision des autres agents quant à leurs stratégies de trading futures. Le but étant notamment d’essayer de comprendre l’impact de facteurs régulateurs comme la taille du pas de cotation, ou encore l’introduction d’une taxe sur les transactions

2.2.6 Impact de marché (Bacry, Mastromatteo)

Nous avons utilisé une base de données de plus de 400.000 meta-ordres envoyés par un broker sur les marchés européen en 2010 afin d’étudier l’impact de marché de ces ordres à différents échelles de temps. L’étude de cet impact aux différentes échelles de temps est tout à fait primordiale pour la compréhension des problèmes liés au risque haute fréquence et à la stabilité des marchés. Il n’existe que très peu (nettement moins d’une dizaine) d’études empiriques de ce type du fait de la difficulté d’obtenir une base de données de meta-ordres. Nous avons mis en évidence de nombreuses propriétés de l’impact de marchés, certaines confirmant des résultats obtenus par des travaux précédents, d’autres au contraire les infirmants. Notamment, nous avons montré que l’invariance de la fameuse “square-root law” par rapport au temps d’exécution n’est pas vérifiée sur notre jeu de données.

Parallèlement a été développé un modèle théorique d’impact de marché permettant de comprendre que la concavité de cet impact (considéré comme une fonction du temps) est liée à des caractéristiques universelles du processus du prix. Notamment, ce modèle permet montrer analytiquement comment la liquidité disparaît autour du prix comme conséquence du “market clearing”, et comment des séquences d’ordres successifs rencontrent progressivement plus de volume loin du prix initial, ce qui explique la concavité observée empiriquement dans la fonction d’impact.

Finalement, nous avons étudié un effet de biais qui contamine l’estimation de l’impact pour les contrats à gros tick, et qui se produit lorsqu’un acteur décide d’exécuter un ordre en conditionnant sur les conditions de liquidité. Nous avons déterminé exactement cet effet dans le cadre d’un modèle spécifique, et exploré ses propriétés dans un cas plus général.

2.3 Risque de contrepartie et *funding* (Crépey, Jeanblanc, DW, NN, Nguyen, Song)

Depuis la crise, les ajustements de valorisation (*credit valuation adjustment* CVA et *debit valuation adjustment* DVA) pour tenir compte du risque de défaut des deux contreparties d’un contrat financier, ainsi que du coût de son financement (FVA), figurent parmi les principaux enjeux des banques. Une problématique connexe est celle des courbes multiples, avec l’émergence depuis 2007 d’écarts significatifs entre différentes notions de taux interbancaires équivalents auparavant. Un effort important de l’équipe a porté sur l’étude mathématique des structures de dépendance sous-jacentes à ces nouvelles réalités des marchés financiers. On a ainsi introduit une approche par équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs), sous une hypothèse d’immersion d’une filtration de référence dans la filtration progressivement grossie par les temps de défaut des deux parties. Cette approche a été appliquée avec succès sur produits de taux d’intérêts, en tenant compte également des aspects courbes multiples. Un point notable des modèles est le recours à des drivers de type Lévy pour améliorer la flexibilité et la calibrabilité sans augmenter la dimension markovienne (coût de calcul). Dans le cas, de fort *wrong way risk* (dépendance adverse entre exposition sous-jacente et risque de crédit des parties), du risque de contrepartie sur produits dérivés de crédit, l’hypothèse d’immersion est inadéquate et nous avons développé des modèles de copules dynamiques, obtenus par l’ajout d’une filtration aux modèles de crédit portefeuille statiques usuels (un modèle dynamique étant indispensable pour traiter du risque de contrepartie). Le modèle dit de chocs communs est notamment le seul dans la littérature existante à offrir l’ensemble de la tractabilité requise, à savoir une calibrabilité conjointe efficace aux CDS et aux CDO assortie d’une structure dynamique. Du point de vue mathématique, un enjeu encore largement ouvert est la détermination d’une méthode de valorisation des risques concernés qui soie cohérente d’une part à travers diverses mesures de probabilité (risque-neutre pour le pricing et actuarielle pour les aspects réglementaires), et d’autre part au niveau portefeuille à travers diverses classes d’actifs. Une collaboration est en cours avec Andrea Macrina (University College London) pour étudier l’apport possible à cette fin de la théorie des *pricing kernels* (particulièrement « dirigés par l’information »), en lien également avec la *benchmark approach* de E. Platen.

2.4 Assurance (Chevalier, Romero, Lim)

Apparues dans les années 70 aux Etats-Unis, les *variable annuities* sont des produits d’assurance vie indexés sur les marchés financiers. Depuis leurs créations, ils n’ont cessé d’évoluer et de se complexifier

car les compagnies d'assurance proposent de plus en plus de garanties ou de possibilités de modifications dynamiques du contrat. Le succès commercial de ces produits rend crucial les problèmes de valorisation et de couverture pour les compagnies d'assurance. En plus de la complexité de ces produits, leurs maturités sont très longues (plus d'une trentaine d'année) et cela implique un effort important de modélisation des taux d'intérêts et de l'évolution des actifs sur lesquels sont adossés ces produits. En particulier, l'hypothèse de markovianité des processus peut être trop restrictive sur ces échelles de temps. Enfin, la multiplicité et la nature des risques associés à ces produits (risque de longévité, de marché, de comportement de l'assuré,..) empêchent toute couverture exacte. Nous avons ici affaire à des marchés structurellement incomplets. Notre équipe a donc choisi de développer une approche de *pricing* et *hedging* par prime d'indifférence, étendant la notion de prix d'indifférence souvent utilisée en marchés incomplets. La détermination de cette prime est basée sur la résolution de problèmes de contrôle stochastique réguliers dans un contexte non-markovien et avec des maturités aléatoires. Les outils mathématiques apparaissant naturellement sont des EDSR dans une filtration progressivement grossie. Nous avons ensuite introduit la possibilité d'effectuer des retraits anticipés par l'assuré et étudié la prime d'indifférence dans les cas où l'assuré suit la stratégie la plus désavantageuse pour l'assureur. Cela nous a conduit à la résolution un problème de contrôle plus complexe mêlant contrôle régulier et impulsif.

2.5 Approximations numériques (Crépey, De Marco, Gobet, Menozzi, Sagna, Touzi, Turkedjev)

Un premier axe de travail occupant plusieurs membres de nos équipe, concerne l'approximation numérique de problèmes liés à la CVA. Dans les modèles considérés, il s'agit de discrétiser des EDSR en grandes dimensions et pour une dynamique assez générale de l'actif sous-jacent (diffusions, saut pur, modèle tenant compte de défauts). Les méthodes usuelles, probabilistes ou déterministes, se révèlent dans ce cadre inapplicables.

S. Crépey, sa doctorante T. M. Nguyen et S. Menozzi s'intéressent à des approches de types linéarisations, dans la lignée de celles proposées dans le cadre diffusif par Fuji et Takahashi. Des exemples numériques effectués par N. Nguyen et D. Wu sont encourageants, l'analyse de l'erreur d'approximation reste à faire.

Des approches par développement asymptotique en petite non-linéarité ont été développées par E. Gobet et S. Pagliarani, ce qui permet d'obtenir des formules semi-explicites qui s'adaptent très bien à la dimension grande. En pratique l'hypothèse de petite non-linéarité est raisonnable car elle est par exemple associée au spread de défaut exprimée en % par rapport à 1 (en général de l'ordre de 1% à 5% \ll 1). Les tests sur la CVA-FVA sont probants. Alors que les résultats heuristiques de la littérature (ceux de Takahashi) suggèrent qu'un développement à tout ordre est possible, nous établissons que pour la FVA (avec des générateurs faisant apparaître des parties positives), le développement à l'ordre 3 peut ne pas exister, montrant la limitation réelle de ces points de vue.

Sur un autre point de vue, de nombreux progrès ont été réalisés dans l'approximation des EDSR par méthodes probabilistes, notamment via les méthodes de régression. De nombreuses recherches originales sont actuellement en développement comme par exemple la parallélisation de ces méthodes et la mise en oeuvre sur cartes graphiques par E. Gobet, J. Salas (La Coruna Univ.), P. Turkedjev, C. Vasquez (La Coruna Univ.); ou la sélection adaptative des bases de régression pour obtenir la meilleure approximation possible pour un effort de calcul donné (techniques de sélection de modèle par pénalisation, E. Gobet et L. Zwald de l'Univ. Joseph Fourier), ou la mise en oeuvre de méthodes d'échantillonnage préférentiel pour prendre en compte les événements rares dans les problèmes de contrôle stochastique (E. Gobet, P. Turkedjev).

Enfin, de nouvelles techniques d'approximation numérique ont été introduites par P. Henry-Labordère, X. Tan et N. Touzi. Il s'agit de schémas purement progressifs, basés sur une représentation en termes de diffusion branchante à la Mc Kean, et contournant complètement la complexité numérique des méthodes de régressions répétées. Nous montrons qu'une telle représentation s'étend à un cadre plus général, autorisant une dépendance de l'ensemble de la trajectoire (options exotiques), ainsi que des coefficients à signe arbitraire dans la non linéarité. L'extension de ces méthodes d'approximation à des non linéarités plus générales (prenant en compte les *repos* et autres aspects pratique de la gestion de la couverture des options) est en cours d'élaboration. L'idée est de superposer les algorithmes de diffusions branchantes et les techniques de différentiation automatique développées dans l'approximation numérique des grèques. Comme cas particulier de cette nouvelle technique, nous a mis en place une méthode d'approximation de diffusions qui évite complètement l'erreur de discrétisation en temps.

Par ailleurs, A. Sagna et S. Menozzi travaillent sur des approximations numériques pour des problèmes de contrôle provenant du filtrage. L'idée est de mettre à jour dynamiquement un contrôle agissant sur une

diffusion qui n'est pas directement observée de sorte à maximiser la probabilité que cette diffusion reste au-dessus d'un certain seuil. Ce type de problème est motivé par la gestion de ressources naturelles : on souhaite par exemple établir un quota de poissons à pêcher en fonctions de ceux que l'on a pu observer sans toutefois trop puiser dans la population globale. L'approche retenue consiste à coupler des algorithmes d'optimisation stochastique à la Kushner à des techniques de quantification numérique.

S. Menozzi s'intéresse avec V. Konakov (Higher School of Economics, Moscou) à la discrétisation et à l'erreur d'approximation associée pour le mouvement Brownien sur des variétés, qui apparaît naturellement dans le cadre de certains modèles de taux d'intérêts (voir par exemple la thèse de Caroline Pintoux). L'idée est d'adapter la construction de Pinsky (TAMS, 76) de sorte à obtenir des vitesses de convergences, voire dans certains cas des procédures exactes de simulation (Brownien hyperbolique).

A. Sagna étudie des méthodes de réduction de la variance par quantification optimale, avec application au pricing des options *path-dependent* par quantification et par Monte Carlo.

2.6 Finance d'entreprise, hasard moral (Chevalier, Gaigi, Ly Vath, Touzi)

L'évaluation d'une entreprise est non seulement un problème fondamental en finance d'entreprise mais également un des piliers fondateurs du marché financier. Plusieurs méthodes sont utilisées par les intervenants des marchés d'actions, en particulier les analystes financiers, dont les plus couramment utilisées sont le DCF et les différents multiples. Cependant, la valeur d'une entreprise provient théoriquement de sa capacité à générer du cash afin de le distribuer aux actionnaires. Cette valeur dépend d'un ensemble de paramètres soumis aux aléas du marché dans lequel elle opère. Mais elle dépend aussi et surtout de la capacité du *manager* à identifier et exécuter les meilleures politiques de gestion maximisant l'intérêt des actionnaires, dont les politiques de distribution de dividendes, d'investissement et de financement. Dans notre travail, nous avons relâché un certain nombre d'hypothèses classiques en finance d'entreprise. Nous traitons en particulier le cas des actifs non-liquides et des problèmes liés à la structure du capital de l'entreprise. Cette dernière est particulièrement importante pour les banques, surtout si l'on prend en compte des contraintes réglementaires et de solvabilité. Mathématiquement, ces problèmes sont formulés comme des problèmes de contrôle stochastique sous contraintes.

Dans un travail en collaboration avec Jaksza Cvitanic (Caltech) et Dylan Possamaï (Dauphine), Nous avons mis en évidence une méthode générale pour la résolution des problèmes de Principal-Agent avec hasard moral. Ces problèmes relèvent de la théorie des contrats qui est à la base de la finance d'entreprise. Le Principal cherche une politique de contractualisation, qui se manifeste par un mode de rémunération, qui lui permet de forcer l'Agent à révéler sa stratégie optimal et ainsi de fournir l'effort prévu par le Principale. Une application à la rémunération des gestionnaires de fonds montre l'efficacité de cette méthodologie. Dans cet exemple, l'Agent choisit l'allocation sur les différents actifs du marché. Le principal observe la performance du fond ainsi que l'évolution de certains indices du marché. Le problème de hasard moral est dû au fait que le Principal n'a pas accès à la composition du portefeuille de l'Agent. Nous montrons qu'afin de responsabiliser l'Agent, le Principal doit proposer une rémunération indexée sur la performance du fonds et sur sa variation réalisée. Ceci permet intuitivement de contrôler la prise de risque de l'Agent dans sa stratégie de gestion de fonds.

2.7 Asymétrie d'information (Aksamit, Hillairet, Jeanblanc, Song)

La majorité des modèles stochastiques de marché financier sont représentés par une semimartingale (de dimension finie) dans une filtration donnée et les études faites basées sur le calcul stochastique. Dans la littérature, les propriétés de cette semimartingale sont les seuls éléments impliqués dans les conceptions et les applications des modèles (par exemple, des modèles Browniens, de Lévy, etc.). Avec la complexification des marchés est né le besoin de modèles qui prennent en compte différents facteurs d'influence (par exemple, des facteur économiques, des risques exogènes, des informations particulières), ainsi que différents agents avec des informations différentes (information asymétrique, délit d'initié). Cela fait apparaître des modèles dans lesquels doivent être pris en compte non pas une seule filtration, mais deux ou plusieurs. L'apparition de ces modèles pose immédiatement un problème mathématique : la semimartingale dans la filtration de référence, qui représente les prix des actifs négociables dans un flot d'information déterminé, peut ne plus être une semimartingale dans une seconde filtration, ce qui rend l'utilisation du calcul stochastique inapplicable et pose des problèmes d'arbitrage. Lorsque la semimartingale reste semimartingale dans toutes les filtrations concernées, le lien entre le calcul stochastique lié à cette semartingale dans les différentes filtrations constitue un élément essentiel pour l'applicabilité des modèles. C'est à partir de ce point qu'intervient la théorie du grossissement de filtrations. Nous nous intéressons aux problématiques suivantes

- Analyse des modèles de grossissement de filtrations utilisés dans l'étude des risques : étude des caractéristiques essentielles des filtrations dans ces modèles (problèmes de mesurabilité, propriétés de représentation prévisible, etc.) et développement de formules de calculs.
- Construction de modèles de grossissement de filtrations ayant des propriétés particulières. Ce sont, par exemple, des modèles ayant le même processus d'intensité, des modèles dont la dynamique est déterminée par une équation différentielle stochastique, des modèles sous l'hypothèse de densité conditionnelle avec un processus de densité Markovien, etc.
- Etude des arbitrages liés à la variation du flot d'informations. Notre problématique prend sa source dans la modélisation de temps de défaut dans les problématiques de risque de crédit : la connaissance de l'instant de défaut, ou la connaissance de la non occurrence de ce temps, ne doivent pas donner lieu à des arbitrages dans le marché financier. Une étude précise et complète a été effectuée : nous montrons qu'il n'y a pas d'arbitrage de première espèce avant τ (même si, dans certains cas, il y a des arbitrages, que nous explicitons), et nous donnons une condition pour que cette situation ait lieu après τ . Nous mettons en place une mesure de l'information à travers le drift d'information.
- Calcul de l'intensité de défaut : cette quantité dépend de l'information avec laquelle on travaille, et nous donnons les outils pour calculer cette intensité dans le cas de multi défauts, qu'il soient ordonnés ou non.

2.8 Risque de modèle et couverture robuste (Claisse, Menozzi, Touzi, Guo, Kallblad,

L'évaluation et la couverture d'options exotiques nécessite la mise en place d'un modèle calibré sur l'information instantanée et consistant avec le principe de non arbitrage. Ces deux conditions laissent un large choix pour le modèle à utiliser. Les praticiens utilisent une large gamme de modèles qu'il choisissent en lien avec le problème de couverture de risque correspondant. Par exemple, pour un produit du type *gap option*, il est clair qu'un modèle pertinent doit contenir des sauts. De même, pour un produit de type *variance réalisée*, un modèle à volatilité stochastique est nécessaire.

L'outil de calibration usuel utilisé par la grande majorité des opérateurs de produits dérivés exotique est la surface de volatilité implicite. Cette information est équivalente à la donnée de la distribution marginale pour certaines maturités de l'astif sous-jacent (sous la probabilité neutre au risque). Ceci a motivé l'intérêt pour les processus à marginales croissantes pour l'ordre convexe, appelés *peacocks* (PCOC = Processus Croissants pour l'Ordre Convexe), qui ont l'objet d'un livre récent de Roynette, Profeta et Yor. Menozzi complète le résultat de ce livre par d'autres exemples en développant différentes techniques pour construire des exemples de PCOC.

Le problème d'une telle démarche est qu'elle laisse une large part à l'arbitraire, car on constate en pratique que deux modèles non arbitrables calibrés sur la même information de marché peuvent induire des évaluations significativement différentes pour un produit exotique donné. Nous sommes ainsi face à un risque de modèle qu'il convient de comprendre, de mesurer, et d'appréhender.

C'est dans ce cadre que s'inscrivent plusieurs travaux récents initiés par P. Henry-Labordère (Société Générale) qui propose de mesurer le risque de modèle par l'amplitude de l'intervalle de tous les prix réalisables par un modèle non arbitrageable et calibré à l'information du marché. Du point de vue mathématique, ce problème se réduit à une nouvelle classe de problèmes de transport optimal, appelés *transport optimal de martingales*. Le problème dual correspondant admet une interprétation financière naturelle d'importance cruciale : il s'agit de coût de sur-couverture robuste de l'option exotique, c'est à dire le plus petit coût nécessaire pour réaliser une stratégie réalisant l'objectif de couverture simultanément dans tous les modèles non arbitrables et calibrés au marché.

Ce nouveau problème a engendré plusieurs travaux par nos équipes, et conduisent à des PCOC extrêmes, dans le sens où ils sont optimaux pour le critère défini par la nature du produit dérivé. Le passage du temps discret au temps continu dans ces problèmes nécessite des développements mathématiques non triviaux, et surtout non abordés dans les développements connus en processus stochastiques.

2.9 Contrôle stochastique (Jeanblanc, Lim, NN, Ren, Touzi)

La théorie du contrôle stochastique permet d'aborder les problèmes de décision optimale dans les problèmes dynamiques aléatoires.

De tels problèmes apparaissent naturellement lorsque l'on veut résoudre de manière dynamique des problèmes d'optimisation, typiquement des problèmes de maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse terminale, des problèmes de versement de dividendes, de liquidation de portefeuille. Nous avons étudié un problème de consommation/ richesse optimale en faisant un lien entre problème dual et problème primal dans une approche à la Hu-Imkeller-Muller.

De nombreux progrès ont par ailleurs été obtenus dans l’extension de la théorie du contrôle stochastique au cas dépendant de la trajectoire, permettant ainsi d’aborder les risques exotiques.

2.10 Equations différentielles rétrogrades (Bion Nadal, Crépey, Gobet, Jeanblanc, Lim, Song, Ren, Touzi)

Ce sujet est central dans différents problèmes de mathématiques financières, par exemple pour résoudre des problèmes de pricing sous contraintes et des problèmes de maximisation d’utilité.

2.10.1 EDSRs à horizon aléatoire et grossissement de filtration

Les problèmes de pricing non linéaires du risque de contrepartie se formalisent sous formes d’EDSRs à horizon aléatoire, pour lesquelles on a besoin de développer des approches à forme réduite au-delà de l’hypothèse usuelle d’immersion utilisée dans les travaux mentionnés Sect. 2.3. Dans un travail récent, Crépey et Song introduisent une généralisation adéquate de cette hypothèse. Traduite dans un langage classique de grossissement de filtration, cette généralisation fait apparaître une nouvelle notion de temps aléatoire, dit invariant, qui, pour les applications visées, se compare avantageusement aux notions usuelles de temps de défaut telles que pseudo-temps ou temps à densité.

Ce genre d’EDSRs apparaît également dans les problèmes d’assurance puisque le temps terminal est alors aléatoire (temps de mort, temps d’accident, ect.). Lim introduit une méthode qui consiste à considérer une EDSR à temps terminal aléatoire comme une EDSR brownienne à temps terminal constant ce qui permet de généraliser les résultats concernant celles-ci aux EDSR à temps terminal aléatoire.

Une étude de la comparaison de solutions d’EDSR de même générateur dans des filtrations différentes est en cours.

2.10.2 EDSRs réfléchies

Les problèmes de valorisation d’obligations convertibles sont souvent de très grande dimension du fait de la forte *path-dependence* des clauses de rappel anticipé. Dans un article commun, Crépey et Jean-François Chassagneux établissent une vitesse de convergence pour la discrétisation en temps de l’EDSR du valorisation d’un produit avec clause de rappel anticipé très fortement *path-dependent* (selon des spécifications couramment rencontrées dans le cas des obligations convertibles). Dans les cas markoviens la fonction valeur est caractérisée comme l’unique solution de viscosité discontinue de l’EDP associée. On établit également la convergence d’un schéma déterministe pour cette EDP, mais ce schéma est purement théorique (c’est précisément la motivation pour le point de vue EDSR) étant donnée la dimension markovienne très élevée du problème, tandis que le schéma d’EDSR est viable en pratique comme analysé en détail dans un article précédent de Crépey et Abdallah Rahal, motivation pour le présent travail.

2.10.3 EDSRs du second ordre et EDP dépendant de la trajectoire

Les EDSR du second ordre sont motivées par l’application aux problèmes de décision optimale en dynamique stochastique aléatoire pour les phénomènes dépendant de la trajectoire. Il s’agit d’une classe de problème qui inclut la couverture des options exotiques (asiatique, barrières, variance réalisée), les problème de gestion de portefeuille à prise de risque contrôlée, les problème de rémunération optimale en présence de hasard moral. Cependant, les EDSR requièrent une régularité qui n’est en général pas satisfaite, même dans le cadre de non dépendance de la trajectoire (modèles markoviens). C’est pour cette raison, que nous nous sommes intéressés dans nos travaux récents à une nouvelle notion de solutions de viscosité pour ces problèmes.

3 Activités régulières

3.1 Séminaire probabilités et mathématiques financières

Ce séminaire (hebdomadaire) touche un public plus large que celui des membres de l’équipe. Il permet de faciliter les échanges entre les deux communautés probabilistes et mathématiques financières. Les orateurs sont souvent des chercheurs non parisiens ; le support financier de la chaire permet facilement d’inviter des extérieurs, français ou étrangers, et facilite les échanges. La liste des séminaires liés à des thèmes de finance est ci-dessous.

— 4 décembre : Emilio Barucci (Politecnico di Milano) *Health insurance, portfolio choices, and retirement in incentives*

- 27 novembre : Hilmar Mai (WI Berlin) Statistical inference for Lévy-driven SDEs : drift estimation and jump filtering
- 20 novembre Zhenjie Ren Large Deviations for Non-Markovian Diffusions and a Path-Dependent Eikonal Equation
- 13 novembre : Philip Protter (Columbia University) *Strict Local Martingales*
- 6 novembre : Paolo Pigato (Université Paris-Est) *Tube estimates for Asian type stochastic differential equation*
- 9 octobre : Samuel Drapeau (Humboldt-Universität zu Berlin) Minimal Super Solutions of BSDE : Hedging, Duality, Markov Property
- 2 octobre : Stefan Ankirchner (Universität Jena) A generalized Donsker theorem and approximating SDEs with irregular coefficient
- 19 Juin Christophe Pérignon (HChevalier) CoMargin
- 12 Juin Christine Grün Games of optimal stopping under incompleteness of information
- 22 mai : N. Gozian (Université Paris-Est) Inégalités de type Poincaré pour des vecteurs log-concaves par des méthodes de transport
- 15 mai Shiqi Song mai
- 19 avril Jérôme Glachant "Hiring and investment under fixed and proportional costs"
- 20 mars : S. Pulido (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) *Markovian cubature rules for polynomial preserving processes*
- 13 mars Devin Sezer Joint Hitting-Time Densities for Finite State Markov Processes
- 06 mars : L. Campi (London School of Economics) *Pricing and hedging of structured products in energy markets*
- 13 février : S. Crépey (Université d'Evry) *About counterparty risk related to BSDEs*
- 06 février : T. Kruse (Université d'Evry) BSDEs with singular terminal condition and applications to optimal trade execution
- 30 janvier : N. Juillet (Université de Strasbourg) Un problème de transport optimal entre des lois prises dans l'ordre convexe
- 30 Janvier Mai Nguyen
- 23 Janvier Shiqi Song Dynamic one default model

3.2 Groupe de travail Chaire Marchés en Mutations

Les deux équipes d'Evry et de l'Ecole Polytechnique organisent un groupe de travail mensuel.

- 10 mars CMAP
- 3 Mars EVERY Vlad Bally, Intégration par parties et convergence en variation totale dans le Théorème Limite Central, Claudio Fontana A general HJM-framework for multiple curves modeling
- 13 février EVERY Stephane Crepey About a class of counterparty risk related BSDEs, Doerte Kreher Change of measure and (no) arbitrage up to a random time
- 5 décembre (IHP) Tom Hurd (McMaster University), Bootstrap Percolation, Cascades and Financial Systemic Risk

4 Invitations

4.1 Ecole Polytechnique

- Invitation à l'X pour séjour de 4 mois (15/10/2014 → 15/02/2015) d'un doctorant (Marcello Ribaldi) de la Scuola Normale de Pise
- Mathias Beiglböck est Professeur Associé à l'Université de Vienne. Il est spécialiste de transport optimal de martingale et de couverture robuste.
- Patrick Cheridito est Professeur à Princeton University. Il est spécialiste de mesures de risque dynamique et de modèles de théorie de décision en temps continu. Ses travaux récents contribuent au problème de couverture robuste, i.e. sans modèle probabiliste de référence.
- Jaksa Cvitanić est Professeur à Caltech. Il est spécialiste de modèles de Principal-Agent et de hasard moral en temps continu. Ses contributions dans le domaine concernent surtout le problème de rémunération optimal de gestionnaires de fonds.
- Fausto Gozzi est Professeur à l'Université de Rome. Il est spécialisé d'équations aux dérivées partielles en dimension infinie. Ce type d'équations apparaît dans les problèmes de gestion de risque avec retard de la structure d'information, ou dans les modèles de taux d'intérêt et de volatilité stochastique à la Bergomi.

- Steve Kou est Professeur à National University of Singapore. Il est spécialiste d'ingénierie financière : modélisation des sauts sur les marchés de produits dérivés, mesures de risque, méthodes numériques probabilistes.
- Dai Min est Professeur à National University of Singapore. Il est spécialiste de méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles. Ses travaux récents portent sur les problèmes de gestion de portefeuille en présence de coût de transaction, et/ou dans le cas où les bénéfices financiers sont sujets à une taxe sur les plus-values.
- Marcel Nutz est Professeur Assistant à Columbia University. Il est spécialiste de couverture dans un cadre d'incertitude de volatilité et de mesure de sauts. Il est également très investi dans le problème de couverture robuste où il a développé des résultats importants sur la théorie d'arbitrage.
- Habib Ouerdiane est Professeur de probabilités à l'Université de Tunis. Il développe des applications en mathématiques financières et est particulièrement intéressé par les techniques d'approximation des équations différentielles stochastiques rétrogrades.
- Mauro Rosestolato (Scuola Normale, Pisa) est un doctorat sous la direction de Fausto Gozzi. Il travaille sur les EDP dépendant de la trajectoire.
- Jan Oblój est Professeur Associé à *Oxford University*. Il est spécialiste du problème d'embedding de Skorohod qui permet de résoudre certains problèmes de couverture robuste au risque de modèle.
- Shanjian Tang est Professeur à Fudan University (Shanghai). Il est spécialiste d'équations différentielles stochastiques rétrogrades issues du principe du maximum de Pontryagin stochastique en contrôle optimal.
- Jianfeng Zhang est Associate Professeur à *University of Southern California*. Il est reconnu comme l'un des meilleurs spécialistes des équations différentielles stochastiques rétrogrades et leurs applications en finance.

4.2 Invités à Evry en 2014

- Stefan Ankirchner, Université de Iena, Un mois octobre
- Tahir Choulli, Université d'Alberta, Canada Un mois Février
- Philip Protter, Columbia university, 15 jours à l'occasion du semestre thématique, ILB, Novembre
- Doerte Kreher 3 jours , février
- Christine Gruen 3 jours, Juin
- Areski Cousin, ISFA Lyon
- Andrea Macrina, 3 jours, janvier

5 Organisation de conférences

5.1 Petit déjeuners FBF

- 2 décembre Stéphane Crépey AVChevalier Claudio Albanese (Global Evaluation) Jean-Jacques Rabeyrin (BNP PARIBSagna) Chris Kenyon (Lloyds Bank) et Evelyne Guilly (Banque de France)
MODERATEUR : Ingrid Labuzan (Odénot)
- 13 Juin
Jim Gatheral, Professor Baruch College, Dept. of Mathematics, New York Optimal execution and high-frequency signals
Albina Danilova, Professor at London School of Economics, Dept. of Mathematics Understanding Stochastic Volatility in Financial Markets (and the Tobin Tax)
Andrea Pallavicini (Visiting Professor at Imperial College, Dept. of Mathematics, London and Head of Equity, FX and Commodity Models at Banca MastromatteoI, Milan) A Unified Framework for Bilateral and CCP Cleared Trades including Counterparty Risk and Funding Costs
- Mercredi 29 janvier Panorama des Problématiques Actuelles Relatives à l'évaluation des Swaps
Jean-Paul Laurent, professeur, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, PRIMenozzi & Labex RéFi, titulaire de la chaire BNP Paribas Cardif *Management de la Modélisation*, présentera les résultats de son étude sur le sujet.

5.2 Semestre thématique

Voir le document joint

6 Encadrement de doctorants : 2014

6.1 Evry

Les 7 doctorants de mathématiques financières présents au laboratoire sont les suivants. Deux étudiants ont soutenu en 2014, deux soutenances sont prévues pour 2015.

- Hai Nam Nguyen (01/2011,01/2014 Crépey, Jeanblanc) Contributions to Credit Risk and Interest Rate Modeling. La thèse a été soutenue en janvier 2014 dans les locaux de l'ILB.
- Anna Aksamit (01/2011,06/2014 Jeanblanc, Song, M. Yor) Grossissement de filtration. La thèse a été soutenue en juin 2014.
- Tuyet Mai Nguyen (09/2011 Crépey, L. Denis). Calcul de Malliavin avec sauts et application au risque de crédit/contrepartie. La thèse sera soutenue en 2015.
- Ricardo Romo Romero (11/2012 Chevalier, Lim, Jeanblanc) Contrôle stochastique appliqué à l'assurance.
- Jerémy Boutté (10/2012, CIFRE, Gloter, Ly Vath) Marché de matières premières : modélisation et gestion des risques. Problèmes d'estimation statistique par méthode de filtrage sur des processus stochastiques. Etude de l'estimation de la volatilité et de la présence de sauts dans des processus de prix de matières premières. Problèmes estimations de changement de régimes d'arrivés d'ordres de marché.
- M'hamed Gaigi (11/2012, Crépey, Ly Vath, M. Mnif Tunis) Méthodes numériques et problèmes de risque de liquidité. La thèse sera soutenue début 2015.
- Yannick Armenti (03/2014, Crépey, N. El Karoui) Chambres de compensation.

6.2 Ecole Polytechnique

Les doctorants de mathématiques financières présents au laboratoire sont les suivants.

- A.Iuga (EP, 2010–2014) Analyse et modélisation du processus de formation de prix à travers les échelles. Market Impact. La thèse a été soutenue en janvier 2014.
- Gaoyue GUO (EP, 2013–) : couverture de risque et robustesse.
- T.Jaisson (2012–) Modèles de Hawkes en finance.
- Gang LIU (EP, 2013–) : Simulation d'événements rares.
- Gustaw MATULEWICZ (EP, 2014–) : Exploration de graphes stochastiques.
- Zhenjie REN (EP, 2012–) : Contrôle optimal des problèmes non Markoviens et approximation numérique.

6.3 Postdoctorants

- Ankush Agarwal (EP, financement hors Chaire) : méthodes d'approximation numérique.
- S. Kallblad (EP, financement hors Chaire) : couverture de risque et robustesse.
- T. Kruse (LaMME, ILB et Chaire, Novembre 2013- avril 2015) : problèmes de liquidité.
- Iacopo Mastromatteo (CMAP, ILB et Chaire) : microstructure des marchés et données haute fréquence.
- Stefano Pagliarani (EP, financement hors Chaire) : méthodes asymptotiques pour l'approximation.
- Plamen Turkedjiev (financement hors Chaire) : méthodes d'approximation numérique.

7 Activités financées par la chaire

- Semestre thématique information
- Colloquium Bachelier, Janvier 2014, Métabief